

$$\begin{aligned} \text{71) a) } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^j &= \sum_{i=0}^n b^i \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right] = \sum_{i=0}^n b^i 2^i \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad (1,0 \text{ pts}) \quad \quad (1,0 \text{ pts}) \\ &= \sum_{i=0}^n (2b)^i = \frac{(2b)^{n+1} - 1}{2b - 1} \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad (1,0 \text{ pts}) \end{aligned}$$

b) (i) usando la indicación definamos

$$\varphi: \mathcal{F} \rightarrow A^3$$

$$f \mapsto \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3))$$

claramente $\forall f \in \mathcal{F} \quad \varphi(f) \in A^3$ por lo tanto
 φ está bien definida $\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

veamos que φ es biyectiva:

1) Inyectiva: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ tales que

$$\varphi(f) = \varphi(g)$$

$$\Rightarrow (f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$$

$$\Rightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) = g(2) \wedge f(3) = g(3)$$

por lo tanto $f = g$ $\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

2) Sobreyectiva: Sea $(a, b, c) \in A^3$. Definamos

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow A \text{ dada por}$$

$$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$$

claramente $\varphi(f) = (a, b, c)$ y por ende φ es sobre.
 $\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

ii) como A es enumerable entonces $A^3 = A \times A \times A$ también lo es (0,5 pts).

(2)

Usando i) tenemos que $|F| = |A^3|$ y por ende F es numerable. (1,0 pto).

P2) a) Notemos que.

$$S_n = \sum_{k=1}^n k r^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) r^{k+1} \quad \leftarrow (0,5 \text{ pts})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k r^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \quad \leftarrow (0,5 \text{ pts})$$

$$= r \sum_{k=0}^{n-1} k r^k + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \quad \leftarrow (0,5 \text{ pts}).$$

$$= r \left(\sum_{k=1}^n k r^k - n r^n \right) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \quad \leftarrow (0,5 \text{ pts})$$

$$= r (S_n - n r^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \quad \leftarrow (0,5 \text{ pts})$$

(3)

b) usando a) tenemos que

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n = rS_n - nr^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n(1-r) = -nr^{n+1} + \sum_{k=1}^n r^k$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1-r} \left[-nr^{n+1} + \left(\sum_{k=0}^n r^k \right) - 1 \right] \quad (1,0 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{1-r} \left[-nr^{n+1} + \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} - 1 \right] \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{(1-r)} \left[\frac{-(r-1)nr^{n+1} + r^{n+1} - 1 - r + 1}{r-1} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{(1-r)} \left[\frac{nr^{n+2} - nr^{n+1} - r^{n+1} + r}{1-r} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2} \quad (1,0 \text{ pts})$$

c) Basta notar que si $r=1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1,0 \text{ pts.})$$